Risoluzione Problemi Campionato Tappa di Gennaio

Problema Gennaio (cat. 1-2 Media)

Testo:
Tornati a scuola dopo le vacanze natalizie, i ragazzi di Diariko si annoiano, così decidono una cosa: ogni volta che il calendario, composto da mese e giorno, (seguendo lo schema mm/gg, ad esempio il 7 gennaio è scritto 01/07) avrà le cifre in ordine crescente e non per forza tutte diverse tra loro, gireranno un tiktok il giorno stesso durante l'intervallo, proprio come il 01/22, mentre non lo gireranno ad esempio il 01/21. Sapendo che i ragazzi vanno a scuola dal lunedì al sabato e che seguiranno questa regola da martedì 07/01/2025 fino a giovedì 17/04/2025 compreso, quanti tiktok gireranno? (di domenica i ragazzi non girano tiktok)

Svolgimento:
Per avere le cifre in ordine crescente, bisogna intanto guardare il mese:
per gennaio andranno bene le date dall'11, per febbraio dal 22, mentre per marzo e aprile non ci saranno date utili, in quanto il mese non può avere più di 31 giorni.
Ora bisogna stare attenti ai giorni della settimana per escludere le domeniche, ed escludere le date con le cifre non in ordine crescente, come il 20, il 21, il 30 e il 31.
Pertanto risulterà che per il mese di gennaio si avranno 14 giorni, e per febbraio 6 giorni. Per questo i tiktok totali saranno 20.

Problema Gennaio (cat. 3 media-1 Superiore)

Testo:
Durante le vacanze natalizie è venuta una grande nevicata a Diarik Town. Così Dani e Alex hanno deciso di disegnare figure geometriche sulla neve caduta davanti a scuola. Alex parte disegnando con un grande compasso una circonferenza. Dani decide allora di disegnare inscritto un quadrilatero scaleno. Dani a quel punto pensa di sfidare Alex, e gli dice: "Il perimetro del mio quadrilatero misura 26, e tre di quei lati misurano 8,8,9, e se mi disegni il triangolo equilatero la cui altezza misura linearmente come l'area di questo quadrilatero ti offro una cioccolata in tazza!". Alex prova a pensarci, ma il freddo gli congela le idee, così fortunatamente ricorda che esistono i cappelli, e dopo essersene messo uno si mette a ragionare.
Quanto vale il lato del triangolo equilatero disegnato da Alex?

Svolgimento:
Per risolvere questo problema è utile ricordare la formula di Brahmagupta, che consente di calcolare l'area di qualsiasi quadrilatero inscrivibile, conoscendo la misura dei lati.
Iniziamo calcolando il quarto lato per differenza dal perimetro,e viene 26-(8+8+9)= 1.
Poi applichiamo la formula A=$\sqrt{(13 - 1)(13 - 8)(13 - 8)(13 - 9)}$=20$\sqrt{3}$

Poiché la relazione tra lato e altezza in un triangolo equilatero è $L = \frac{2h}{\sqrt{3}}$, in questo caso il lato misura 40.

Problema Gennaio (cat. 2-3 Superiore)

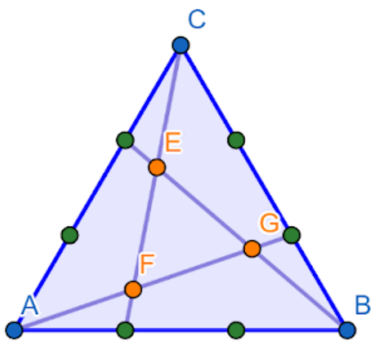
Testo:
Lorenzo sta giocando con un dado con Pietro, che però si accorge del trucco dell'amico. Il dado ha 20 facce e il gioco consiste nel colorare di colori sempre diversi le varie facce che escono. Tuttavia, i numeri escono con probabilità diverse: i numeri primi con probabilità di 1/17 ciascuno, i numeri pari e non primi con probabilità 1/22 ciascuno, infine i numeri dispari non primi con probabilità 15/374 ciascuno. Inoltre, ogni tiro è indipendente dal precedente. Quanti sono i modi diversi con cui possono uscire dei numeri affinché la probabilità totale di quella giocata sia 15/2377892?
Un modo è diverso da un altro quando o i numeri o l'ordine variano.

Svolgimento:
Per risolvere questo problema partiamo trovando quanti numeri e di quali tipologie escono. nella probabilità della giocata, si ha al numeratore 15, perciò, visto che non vi sono altre probabilità che contengano un fattore 5 nella loro scomposizione del numeratore, è presente uno e un solo numero dispari non primo. Riducendo questa probabilità dal totale, rimaniamo col denominatore 6358, ovvero 22·17·17. Dunque, ci sono anche 2 primi e 1 pari non primo. Quindi, in tutto, escono 2 primi, 1 pari non primo e un dispari non primo. Vediamo, ora, di calcolare tutte le giocate possibili con quei 4 tipi di numeri. Da 1 a 20 ci sono: 8 primi, 9 pari non primi, 3 dispari non primi. Dividiamo ora la risoluzione in 2 casi: se i numeri primi sono diversi oppure se sono uguali. Se sono diversi, possiamo sceglierli come $\binom{8}{2}$, ovvero 28 modi. Poi, il pari si può scegliere in 9 e il dispari in 3 modi. Ora dobbiamo considerare le permutazioni di una giocata siffatta, tipo una parola con quattro lettere diverse, ovvero 4! = 24. Per questo caso ci sono 28·9·3·24 = 18144. Nel caso i due primi siano uguali ci sono 8 modi in tutto per i primi (8 coppie di numeri uguali), 9 modi per i pari e 3 per i dispari. Le permutazioni, fatte come per una parola di 4 lettere in cui 2 sono uguali,

diventano $\frac{4!}{2!}$ = 12. Perciò per questa possibilità vi sono 8$\cdot$9$\cdot$3$\cdot$12 = 2592. I due casi vanno sommati, ottenendo tutte le giocate possibili: 18144 + 2592 =20736.

Problema Gennaio(cat. 4-5 Superiore)

Testo:
Fazio ha bisogno di aiuto per isolare dal suo terreno una zona per piantare le cipolle, e perciò chiede assistenza a Dani, che si stupisce quando scopre quanto sia particolare il pattern che l'amico ha deciso di dare alla sua coltivazione. C'è una recinzione esterna a forma di triangolo equilatero con area 344064 m². Poi, si forma un altro triangolo congiungendo i punti medi di quello più grande. A questo punto, si ripete l'operazione con i quattro triangoli che si hanno, e si prosegue così per 6 volte (si consideri passaggio 1 la costruzione del primo triangolo interno). Giunti a questo punto, Fazio prende uno dei triangoli più piccoli che si sono formati, e ne divide ciascun lato in tre parti uguali. Dunque, collega ciascun vertice del triangolo con uno dei punti prima ricavati, come in figura. Per sapere se la zona GEF è abbastanza grande, Fazio chiede a Dani di calcolarne l'area. Con che valore in m² Dani deve rispondere all'amico?



Svolgimento:
La costruzione di base è un frattale che si basa sul triangolo di Sierpinski, mentre la costruzione finale si rifà al triangolo di Feynman.
Ogni volta che si reitera il procedimento di costruzione di quattro triangoli, l'area di ciascuno di questi diventa $\frac{1}{4}$ dell'area del triangolo di partenza. così facendo, al sesto passaggio l'area di ciascuno dei triangoli più piccoli vale $\frac{1}{4^6}$ dell'area del triangolo più grande originale. A questo punto, Fazio costruisce il campo delle cipolle attraverso la costruzione di un triangolo di Feynman, e perciò la zona GEF ha area $\frac{1}{7}$ dell'area del triangolo da cui si è partiti a costruire. Numericamente, la zona ricavata ha area A= $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4^6}\cdot 344064$=12 m².

Allenamento per la tappa di Febbraio:

CI.1 Alla fiera dell’Est
Se il rapporto tra il doppio del doppio di k e il quadruplo del quadruplo di 2 è un numero intero positivo, quanto vale k come minimo?

(8)

CI.2 Solo pari
Quante sono le cifre pari all’interno del numero N = 1000100110021003 ... 201920202021?

(1567)

CI.3 Problema logistico!
In una scuola ci sono 30 classi. In base alle normative vigenti, ogni classe frequenta 4 giorni in presenza e 2 giorni in DAD, ogni settimana. Determinare quante sono le coppie ordinate (A, B) di classi che verificano la proprietà seguente: esiste almeno un giorno della settimana in cui sia A che B frequentano in presenza.

(870)

CI.4 Diagonale, riga e colonna
Sia N il numero di modi in cui è possibile riempire una tabella 2021 x 2021 con dei numeri interi da 0 a 5 in modo tale che:

- La somma dei valori di ogni riga sia multipla di 2;
- La somma dei valori di ogni colonna sia multipla di 3;
- La somma dei valori di ognuna delle due diagonali maggiori sia multipla di 6.

Qual è l’esponente della più grande potenza di 6 che divide N?

(2418)

Questi problemi di allenamento sono tratti da vecchie edizioni della One Hundred Problems. Ringraziamo Mattysal (Matteo Salicandro) per averci consentito di proporli come allenamento. Vi ricordiamo che le iscrizioni per la settima edizione della competizione sono ancora aperte!